Problemas de Matemáticas (elegir 2 de 3)

1. Matemáticas

Sea el campo vectorial $\mathbf{F} = 6xy(\cos z)\,\mathbf{i} + 3x^2(\cos z)\,\mathbf{j} - 3x^2 y(sen\, z)\,\mathbf{k}$.

a) ¿Es **F** irrotacional?
b) ¿Es **F** conservativo?
c) ¿Es **F** solenoidal?
d) Hallar, si es posible, el campo escalar f tal que $\mathbf{F} = -\nabla f$
e) Evaluar la circulación de **F** a lo largo de la curva:
$\boldsymbol{\sigma}$: $x = \cos^3\theta,\ \ y = sen^3\theta,\ \ z = 0,\ \ 0 \le \theta \le \pi/4$
f) Discutir si se verifica el Teorema de Helmholtz

2. Matemáticas

Resolver el siguiente sistema de ecuaciones diferenciales usando el método matricial:

$$\begin{aligned} \dot{x} &= x + y \\ \dot{y} &= 9x + y \end{aligned}$$

3. Matemáticas

La tabla siguiente muestra la climatología de Junio para Guayaquil, Ecuador, 1951-1970. Los asteriscos indican los años con “El Niño“. Las últimas filas son datos de apoyo.

Sean los eventos: { A : T > 24 ºC }, { B : Pcp > 0.3 mm (llovió) }, { $\tilde{N}$: “El Niño“ (en el contexto ENSO)}, y sea $P(X)$ la probabilidad correspondiente al evento X.

a) Estimar, usando frecuencias relativas: $\mathrm{P}(A), \mathrm{P}(B), \mathrm{P}(\tilde{N}), \mathrm{P}(A \cap B), \mathrm{P}(A \cap \tilde{N}), \mathrm{P}(B \cap \tilde{N})$
b) Estimar: $\mathrm{P}(\tilde{N} | B)$
c) Discutir si son independientes los eventos $\tilde{N}$ y B .

Para las series de temperatura y precipitación calcular las medidas estadísticas que se indican en cada uno de los siguientes apartados; en cada caso discutir si como medidas estadísticas son resistentes y si son robustas; comparar el comportamiento de las dos series.

d) Media y mediana.
e) Desviación típica muestral corregida (insesgada) y rango intercuartílico (IQR).
f) Coeficiente de asimetría (skewness) e índice de Yule-Kendall.

Por último:

g) Expresar la temperatura y la precipitación de Junio 1951 como anomalías estandarizadas.
h) Calcular la matriz de correlación entre la temperatura y la precipitación.

Observaciones:

- Trabajar con datos **sin agrupar**.
- Recordar utilizar estimadores **insesgados** en los apartados e, f y g.

Tabla auxiliar

Año	T[ºC]	Pcp[mm]	El Niño
1951	26,1	43	*
1952	24,5	10	
1953	24,8	4	*
1954	24,5	0	
1955	24,1	2	
1956	24,3	13	
1957	26,4	31	*
1958	24,9	0	
1959	23,7	0	
1960	23,5	0	
1961	24,0	2	
1962	24,1	3	
1963	23,7	0	
1964	24,3	4	
1965	26,6	15	*
1966	24,6	2	
1967	24,8	0	
1968	24,4	1	
1969	26,8	127	*
1970	25,2	2	
$\sum_{i=1}^{n} x_i$	495,3	259	
$\sum_{i=1}^{n} x_i^2$	12284,4	19491,0	
$\sum_{i=1}^{n} x_i^3$	305141,3	2164441,0	
$\sum_{i=1}^{n} (T_i Pcp_i)$	6793,1		

Problemas de Física (elegir 2 de 3)

1. Física.
Un mol de gas perfecto que se encuentra inicialmente a 1 atm y 27ºC, se comprime lenta y adiabáticamente hasta que su temperatura alcanza 47ºC. A continuación se expande lenta e isotérmicamente hasta la presión de 1 atm que tenía originalmente. Determinar:

a) La presión y el volumen que alcanza después de la compresión adiabática.
b) Las variaciones de energía interna y de entalpía en el proceso.
c) El trabajo realizado por el gas en el proceso completo.
d) La variación de entropía en el proceso.
e) La variación relativa de densidad entre los estados inicial y final.
f) Represente gráficamente en el diagrama de Clapeyron todo el proceso.

Datos c_p= 28,8 J/mol·K y R= 8,31 J/mol·K.

2. Física.

Un condensador está formado por dos cilindros concéntricos de radios a y c (2 y 5 mm respectivamente), siendo su longitud L = 5 cm (considere $L >> c$). En una primera situación, el cilindro interior posee una carga +Q = 5×10^{-9} C, y el exterior una carga –Q. La región comprendida entre los dos cilindros se llena con un material dieléctrico de constante $\kappa = 4$ (mica).

a) Determinar la diferencia de potencial que existe entre los dos cilindros.
b) Hallar la densidad de carga ligada σ_b, sobre, (b1) la superficie interior del dieléctrico y (b2) la superficie exterior del dieléctrico.
c) Calcular la energía electrostática total almacenada.

Después, manteniendo la mica hasta una distancia del eje, b = 3 mm, el resto se rellena de porcelana, de permitividad relativa 6,5 , y se conectan las armaduras del condensador a una diferencia de potencial variable.

d) En esta nueva situación, determinar la máxima diferencia de potencial que se puede aplicar al condensador sin que se produzca la perforación de ninguno de los dos dieléctricos.

Se sabe que el máximo campo eléctrico que pueden soportar los dieléctricos es: para la mica 60 kV/mm, y para la porcelana 20 kV/mm. ε_0 =$8,85\times10^{-12}$ C^2/Nm^2

3. Física.

En régimen estacionario un fluido incompresible de densidad ρ, se mueve por el interior de una tubería horizontal de sección circular constante, πR^2. El fluido se considera newtoniano de viscosidad constante μ, y cumple la condición de no deslizamiento con las paredes del tubo: $u = 0$ en $r = R$.

a) Suponiendo que existe un gradiente de presión constante a lo largo de la dirección longitudinal del tubo, encontrar la forma del perfil de velocidades en una sección transversal cualquiera.

b) Considerando un caudal de 10 l/s, y la tubería de diámetro 6 cm, determinar el valor de la velocidad máxima en el interior y la posición donde ocurre dicha velocidad máxima.

c) Determinar el valor de la tensión de viscosa a una distancia de R/2 del centro de la tubería.

d) Si la tubería se inclina un ángulo $\phi = 40º$ y con los datos indicados en la figura, calcule la pérdida de carga, en metros, entre los extremos 1 y 2, como consecuencia de la existencia de viscosidad en el fluido.

Nota: La pérdida de carga puede medirse por la variación de la Línea de Altura Motriz (LAM).
Datos: el fluido es aceite $\rho = 900$ kg/m^3 y $\mu = 0{,}18$ kg/m s.

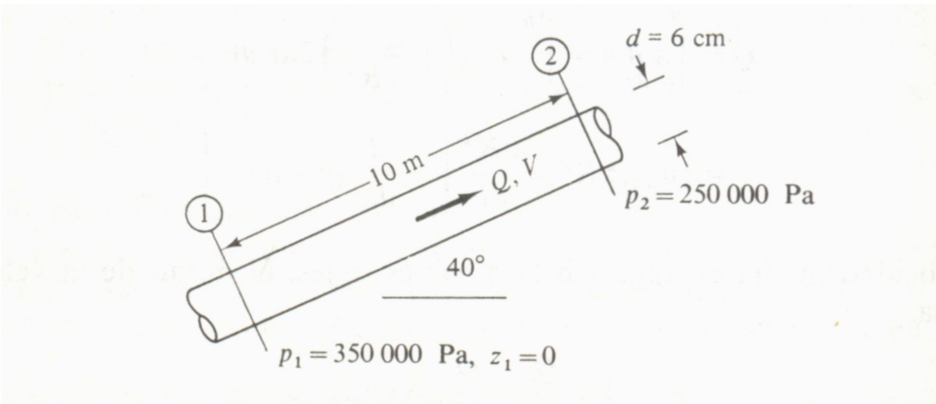

Figura solamente para el apartado d)